

確率数理工学11

2.11.27 連鎖の重要な性質

- 既約性
- 再帰性
- 正再帰性
- 周期性

興味のある量

- 平均再帰時間
- 平均吸収時間

収束性

- 定常分布
 - 極限分布
- 存在?
収束?

以降は、これら調べる

既約性

Def (到達可能性)

$I = \{0, 1, 2, \dots\}$: 状態空間

- 状態 $j \in I \wedge$ 状態 $i \in I \rightsquigarrow$ 到達可能

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} 0 \leq \exists n < \infty \text{ st } p^{(n)}(i, j) > 0 \quad \boxed{i \rightarrow j} \quad \text{と書く.}$$

($p^{(0)}(i, i) = 1, p^{(0)}(i, j) = 0$ ($i \neq j$) とする)

- $i \in j \rightsquigarrow$ 相互到達可能

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} i \rightarrow j \wedge j \rightarrow i \quad \boxed{i \leftrightarrow j} \quad \text{と書く.}$$

(定義より $i \leftrightarrow i$)

Lem $\lambda \rightarrow \mu, \mu \rightarrow \nu$ ならば $\lambda \rightarrow \nu$ (推移的) //
 \uparrow \mathbb{Z} の場合.

Thm (相互到達可能性の同値関係)

(1) 反射律: $i \leftrightarrow i$ ($n=0$ 時 $P^{(n)}(i,i) = 1 > 0$)

(2) 対称律: $i \leftrightarrow j \iff j \leftrightarrow i$

(3) 推移律: $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k \implies i \leftrightarrow k$

(証明は各自で示して欲しい)

Def 集合 $B \subset I$ が 既約 (irreducible)

$\iff \forall i, j \in B$ かつ $i \leftrightarrow j$ がある.

特に I (状態空間全体) かつ既約な.

そのマルコフ連鎖は既約である.

Def 集合 $B \subset I$ が 閉 (closed)

$\iff \forall j \notin B, \forall i \in B$ かつ

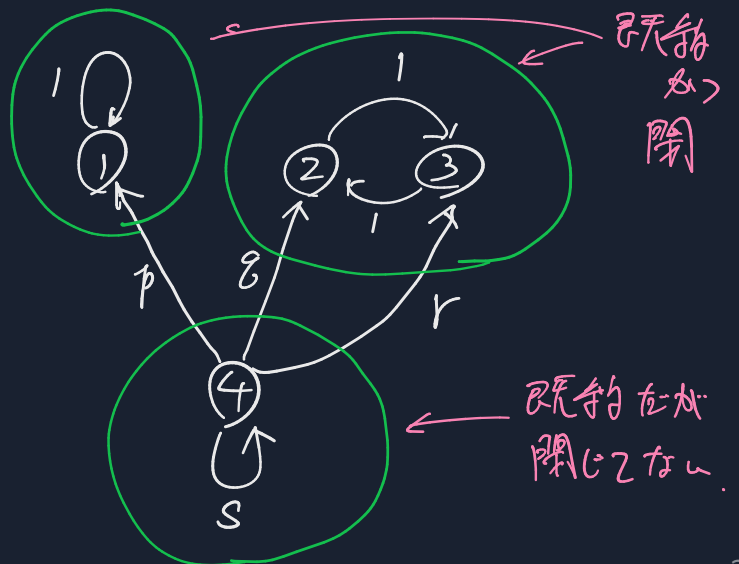
$i \rightarrow j$ がない. (B内から外に出ない)

Ex. (同値類の例)

$I = \{1, 2, 3, 4\}$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & q & r & s \end{bmatrix} \end{matrix}$$

($p+q+r+s=1, p, q, r, s > 0$)



再帰性

Def (初到達時刻)

状態 $j \in I$ の初到達時刻

$$T_j \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ n \geq 1 \mid X_n = j \}$$

← 二つは確率変数
($n=0$ は入る \Rightarrow u なる $u=0$ に注意)

左に ∞ . $\forall n \geq 1 \exists X_n \neq j$ なら $T_j = \infty$ になる.

$$f(i, j) = P(T_j < \infty \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_j = n \mid X_0 = i):$$

到達確率

Def (再帰性)

i が再帰的 \iff $f(i, i) = 1$ (必ず u が帰る $\exists < \infty$)

i が非再帰的 \iff $f(i, i) < 1$ (戻らなくなる \exists 非 $(\neq u)$)

$N_j \stackrel{\text{def}}{=} \geq 1 \text{ 個 } \rightarrow \text{連鎖の時刻 } n=1, 2, \dots \text{ 上 } j \text{ への訪ね回数}$

$g(i, j) := P(N_j = \infty \mid X_0 = i)$ (無限回訪ねる確率)

Thm

i が再帰的 $\iff g(i, i) = 1$

i が非再帰的 $\iff g(i, i) = 0$

* $g(i, i)$ は 0 か 1 上 中間はな

Proof

「初到達時刻の方法」: T_j の値によって事象を分類

$$P(N_i \geq n | X_0 = j)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_i \geq n | \underbrace{T_i = k}_{\substack{\uparrow \\ \text{時刻 } k \text{ で初めて} \\ i \text{ に到達}}}, X_0 = j) P(T_i = k | X_0 = j)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_i \geq n | T_i = k) P(T_i = k | X_0 = j)$$

(\because Markov性, 時刻 k で i に到達すると
その前のことは忘れておく)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_i \geq n-1 | X_0 = i) P(T_i = k | X_0 = j)$$

(時刻 k で時刻 0 とおきかえる. $k=1$ は i に来たときの
 N_i のカウントを 1 つ減らす.)

$$= P(N_j \geq n-1 | X_0 = i) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} P(T_i = k | X_0 = j)}$$

$$\parallel \\ P(T_i < \infty | X_0 = j) = f(i, i)$$

$$= P(N_j \geq n-1 | X_0 = i) f(i, i)$$

\vdots

$$= \underbrace{P(N_j \geq 0 | X_0 = i)}_{\parallel 1} f(i, i)^{n-1} f(i, i) = f(i, i) f(i, i)^{n-1}$$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} P(N_j \geq n | X_0 = i) = \begin{cases} 0 & (f(i, i) < 1) \\ 1 & (f(i, i) = 1) \end{cases}$

$$g(i, i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(N_j \geq n | X_0 = i) = \begin{cases} 0 & (f(i, i) < 1) \\ 1 & (f(i, i) = 1) \end{cases}$$

$$\parallel \quad \parallel \\ P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{N_j \geq n\} \mid X_0 = i\right)$$



Thm λ が再帰的 $\iff \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(\lambda, \lambda) = \infty$

Proof

$X_0 = j$ のとき

$$z_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & (X_n = \lambda) \\ 0 & (X_n \neq \lambda) \end{cases}$$

よって, $N_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ であることに注意 (注意: λ は訪ねる回数).

このとき,

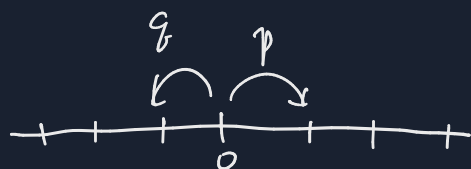
$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty} z_n \mid X_0 = \lambda\right] \stackrel{\text{単調収束}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} E[z_n \mid X_0 = \lambda] = \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(\lambda, \lambda)$$

一方, この左辺は次のようにも評価できる:

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{n=1}^{\infty} z_n \mid X_0 = \lambda\right] &= E[N_\lambda \mid X_0 = \lambda] = E\left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}\{N_\lambda \geq k\} \mid X_0 = \lambda\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_\lambda \geq k \mid X_0 = \lambda) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda, \lambda)^k \quad \leftarrow \text{前の定理の証明より} \end{aligned}$$

よって, λ が再帰的 $\iff f(\lambda, \lambda) = 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} p^{(n)}(\lambda, \lambda) = \infty$ //

Ex. (ランダムウォーク)



1回の推移で右に移動確率: p

1回の移動で左に移動確率: $1-p=q$

$$p^{(2n+1)}(0,0) = 0$$

$$p^{(2n)}(0,0) = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n$$

(n 回右, n 回左)

Stirlingの公式より $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ なるので

$$p^{(2n)}(0,0) \approx \frac{(4pq)^n}{\sqrt{n\pi}}$$

ここで $4pq \leq 1$ なるので

$p=q=\frac{1}{2}$ のとき $4pq=1$

なるので、以下を二つ。

(i) $p=q=\frac{1}{2}$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^{(2n)}(0,0) = \infty \rightarrow \underline{\underline{\text{再帰的}}}$$

(ii) $p \neq q$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^{(2n)}(0,0) < \infty \rightarrow \underline{\underline{\text{非再帰的}}}$$

Note

・ 2次元格子上のランダムウォークは再帰的 (対称性は仮定)

・ 3次元以上だと 非再帰的

- 既約性と再帰性

再帰性は伝播
す！

Lem (1) 状態 i が再帰的かつ $i \rightarrow j$ ならば j も再帰的

(2) 有限で閉じた集合 $A \subseteq Z$ は再帰状態が少なくとも1つは存在。
(閉 Z も無限なら
反例あり)

Proof

(1) まず $f(i, i) = 1$ を示す。(特に $i \rightarrow i$)

i が再帰的ならば $f(i, i) = 1$ である。

$i \rightarrow j$ あり、ある $i = i_0, i_1, \dots, i_k = j$ なる経路が存在し

$$P(i, i_1) P(i_1, i_2) \dots P(i_{k-1}, j) > 0$$

とできる。今 i から j へ至り、 j から i へ2度と戻らないう事実を

考えよう。

$$0 = 1 - f(i, i) \geq \underbrace{P(i, i_1) \dots P(i_{k-1}, j)}_{> 0} \underbrace{(1 - f(j, i))}_{j \text{ から } i \text{ へ戻らないう事実}}$$

$$\Rightarrow f(j, i) = 1 \text{ である。}$$

以上より $i \leftrightarrow j$ である。

すなわち、ある $m, n > 0$ が存在し

$$P^{(m)}(i, j) > 0, \quad P^{(n)}(j, i) > 0$$

$$Z: \sum_{k=0}^{\infty} P^{(n+m+k)}(j, j) \geq \sum_{k=0}^{\infty} P^{(m)}(j, i) P^{(k)}(i, i) P^{(n)}(i, j)$$

$$= \underbrace{P^{(m)}(j, i)}_{> 0} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(i, i) \right)}_{= \infty} \underbrace{P^{(n)}(i, j)}_{> 0}$$

$$= \infty \quad (\because i \text{ が再帰的})$$

よって、 j は再帰的。

(2) 全2の $\lambda \in A$ が非再帰的と2. 矛盾を導く.

前の定理の証明より、 $\forall j \in I$ に対し、

$$E[N_i | X_0 = j] = \sum_{k=1}^{\infty} f(i, i)^{k-1} f(j, i) < \infty$$

である。よって、 A が有限であることより

$$\infty \neq \sum_{i \in A} E[N_i | X_0 = j] = E\left[\sum_{i \in A} N_i | X_0 = j\right]$$

であるが、 A は閉じているため、常にその中に状態 X_n は

とどまると、 $\sum_{i \in A} N_i = \infty$ となるので、矛盾する。 //

Thm 集合 A が有限で、既約かつ閉なら、 A の全2の状態は再帰的である。

Proof Lem (2) より、 A に再帰的な状態が少なくとも1つは含まれる。よって i とする。 A は既約なので、 $\forall j \in A$ に対し、 $i \rightarrow j$ である。 i が再帰的なので、Lem (1) より j も再帰的。 //

Thm (一致団結の性質)

同一の同値類に属する状態は全2再帰的か、

全2非再帰的かのいずれかである。 //

(\because Lem (1) より、ほぼ自明)

※ 再帰性は既約成分全体の性質 \Rightarrow クラスの性質

Thm (既約成分の分割)

$T = \{i \in I \mid \exists j \in I \text{ 之 } i \rightarrow j \text{ かつ } j \rightarrow i\}$: 消滅部分
とすると.

$$I - T = R_1 \cup R_2 \cup \dots \quad (R_i \cap R_j = \emptyset, i \neq j)$$

と分割できると、各 R_k は 既約かつ閉.

さらに、 I が有限なら全ての R_k は 再帰的 //



Proof

$i \in I - T$ とし、 $Z \neq \emptyset$, $C(i) = \{j \mid i \rightarrow j\}$ とおく.
(i から到達可能な領域)

$i \notin T$ かつ、任意の $i \rightarrow j$ なる j には必ず $j \rightarrow i$ である。

つまり、 $\forall j \in C(i)$ は $i \leftrightarrow j$ である。

よって、 $\forall k, l \in C(i)$ は、 $k \leftrightarrow i, l \leftrightarrow i$ であるので、 $k \leftrightarrow l$ である。すなわち、 $C(i)$ は既約。

さらに、 $C(i)$ は閉であることもわかる。なぜなら、 $j \in C(i)$ とし、ある $k \in I$ には必ず $j \rightarrow k$ であるとする。 $i \rightarrow j$ であることから $i \rightarrow k$ となるので、 $k \in C(i)$ である。つまり、 $C(i)$ は閉。

以上より、 $C(i)$ は既約かつ閉。

このようにして、各 $i \in I - T$ は既約かつ閉な集合 $C(i)$ に含まれる。もし、別の $j \in I - T$ に関する $C(j)$ が、 $C(i) \cap C(j) \neq \emptyset$ となれば、 $i \leftrightarrow j$ も成り立つので、 $C(i) = C(j)$ である。

よって、 $I - T = R_1 \cup R_2 \cup \dots$ と分割できる。

最後に、 I が有限なら各 R_k も有限なので、 R_k は再帰的
(前のThmより) //

$$P = \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_N \\ T \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} R_1 & R_2 & R_3 & \dots & R_N & T \\ \hline P_1 & & & & & \\ & P_2 & & & 0 & \\ & & P_3 & & & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & P_N & \\ \hline Q_1 & Q_2 & Q_3 & \dots & Q_N & F \end{array} \right], \quad P^n = \left[\begin{array}{cccc|c} P_1^n & & & & \\ & P_2^n & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & P_N^n & \\ \hline * & * & \dots & * & F^n \end{array} \right]$$

* Tは消滅部分 (dissipative point) と呼ぶ。

Tは前の補題より、 $\forall \lambda \in T$ は非再帰的

(λ が再帰的なら、 $i \rightarrow j$ である $j \rightarrow i$ とあり、 $\lambda \notin T$ となる。)